Universidad Nacional Autónoma de México
Instituto de Energías Renovables

Exámen de Admisión al Doctorado en Ingeniería (Energía) 2016-2
Matemáticas

November 10, 2015

Ejercicio 1
Analice el comportamiento de la curva conocida como la función $sinc(x)$ que está definida por:

$$f(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \qquad \text{en el intervalo} \qquad -\infty < x < \infty \tag{1}$$

Note que $f(0) = 1$.
Si denotamos a la primera y segunda derivadas de $f(x)$ por $f'(x)$ y $f''(x)$ respectivamente, encuentre:
a) La posición de las raíces de la función (las *raices de una función* son los puntos x_r que satisfacen $f(x_r) = 0$).
b) La posición de los puntos críticos (los *puntos críticos* son los puntos x_c que satisfacen $f'(x_c) = 0$).

Ejercicio 2
Examine el comportamiento de la función $f(x)$ con respecto al parámetro c.
La función $f(x)$ está definida por:

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 2x + c} \qquad \text{en el intervalo} \qquad -\infty < x < \infty, \tag{2}$$

a) Encuentre las raíces, los puntos críticos, y la forma de la función para $c = -1$.
b) Encuentre las raíces, los puntos críticos, y la forma de la función para $c = 1$.

Ejercicio 3
Considere el semicírculo definido por la siguiente función:

$$f(x) = +\sqrt{4 - x^2} \qquad \text{en el intervalo} \qquad -2 < x < 2, \tag{3}$$

a) Considere la recta vertical $x= 1$, encuentre el punto de intersección entre esta recta y el semicírculo, y determine las rectas tangente ($t(x)$) y normal ($n(x)$) al semicírculo en el punto de intersección.
b) Encuentre el ángulo α entre la recta x=1 y la recta normal $n(x)$.

Ejercicio 4

Considere la familia de segmentos de circulares de la forma

$$f(x) = \sqrt{r^2 - x^2} - \sqrt{r^2 - 1}, \qquad y > 0, \quad 1 \leq r < \infty \tag{4}$$

a) Verifique que para todo r en el intervalo de interés, los segmentos pasan por los puntos (±1,0).
b) Explique por qué la longitud l de una curva continua $f(x)$ entre los puntos $x = x_1$ y $x = x_2$ se puede encontrar con la expresión

$$l = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left(\frac{df}{dx}\right)^2} \quad dx \tag{5}$$

c) Encuentre la longitud del arco de círculo $f(x)$ que va entre (-1,0) y (1,0) para $r = 1$ y para $r = \sqrt{2}$.

Ejercicio 5

Demuestre que la integral de la campana de Gauss es

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \tag{6}$$

De acuerdo a los siguientes pasos:
a) Demuestre la siguiente igualdad

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx\right)^2 = \int \int_{R^2} e^{-(x^2+y^2)} \quad dxdy \tag{7}$$

b) Escriba la doble integral en su forma en coordenadas polares

$$\int \int_{R^2} e^{-(x^2+y^2)} \quad dxdy = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-r^2} r \quad dr d\theta \tag{8}$$

c) Demuestre que

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-r^2} r \quad dr d\theta = \pi \tag{9}$$

d) Usando estos resultados concluya que la expresión (6) es correcta.

Ejercicio 6

Sea f un campo escalar y $\mathbf{F}$ un campo vectorial. Los operadores $\cdot$ y $\times$ denotan producto escalar y vectorial respectivamente.

Los siguientes operadores diferenciales se definen en coordenadas cartesianas (x,y,z) como:

$$\nabla f = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = (\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z})$$

$$\nabla \times \mathbf{F} = (\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}, \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}, \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y})$$

Demuestre que:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0$$

$$\nabla \cdot (f\mathbf{F}) = f(\nabla \cdot \mathbf{F}) + (\nabla f) \cdot \mathbf{F}$$

Ejercicio 7

Sea una función vectorial $\mathbf{F}$ en el espacio tridimensional definida por $\mathbf{F}$=$(x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k})$ y la esfera E(x,y,z) de radio a centrada en el origen y definida por E=$\{(x,y,z)$ tal que $x^2+y^2+z^2 \leq a^2$ $\}$.

Demuestre que se obtiene el mismo resultado si se integra la proyección de la función $\mathbf{F}$ sobre la superficie de la esfera que si se integra la divergencia de $\mathbf{F}$ sobre el volumen. Esto es:

$$\int\int_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n} \quad dS = \int\int\int_V \nabla\cdot\mathbf{F} \quad dV = 4\pi a^3 \tag{10}$$

donde $\mathbf{n}$=$(x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k})/a$ es el vector normal a la superficie, y S y V son respectivamente la superficie y el volumen de la esfera E.

Ejercicio 8

Sean las matrices A y B definidas por:

$$A = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix}.$$

y

$$B = \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{vmatrix}.$$

donde $0 < \theta < 2\pi$ y a es un número real. Explique el efecto de aplicar AB y BA sobre los vectores unitarios (1,0) y (0,1). Generalice su resultado para un vector arbitrario (a,b).

Ejercicio 9

Sea $A = a_{i,j}$ una matriz de 2×2. Demuestre que el polinomio caracterstico definido por $det(A - \lambda I)$ esta dado por

$$\lambda^2 - tr(A)\lambda + det(A) = 0 \tag{11}$$

donde I es la matriz unitaria de 2×2 y $tr(A)$ y $det(A)$ son la traza y el determinante de A respectivamente.

Ejercicio 10

La distribución de probabilidad de un evento descrito por a variable aleatoria t está dada por la función:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t \leq 0 \\ ce^{-ct} & \text{si} \quad t > 0 \end{cases}$$

Recordando que la probabilidad se define como el cociente de eventos favorables entre los eventos posibles, encuentre la probabilidad de que t esté en el intervalo $[1, 2]$.