Universidad Nacional Autónoma de México
Programa de posgrado en Ingeniería (Area energía)
Exámen de admisión
Matemáticas
Ingreso 2017-1

Pregunta 1
a) Encuentre los puntos x donde la función $f(x)$ definida por:

$$f(x) = \sin \frac{1}{x}$$

toma el valor $f(x) = 1$.

b) Explique por qué razón los puntos x en los que la función $g(x)$ definida por

$$g(x) = r(x) \sin \frac{1}{x}$$

donde

$$r(x) = (1 + x^8)$$

toma el valor $g(x) = 1$, son aproximadamente iguales a los que determinó en el inciso a).
(Sugerencia: compare las gráficas de las funciones $f(x)$, $g(x)$ y $r(x)$).

Pregunta 2
Considere un plano en el espacio cartesiano (x, y, z) definido por la ecuación $ax + by + cz = d$ donde a, b, c y d son números reales.
Recordando que la mínima distancia del plano *al origen* está dada por:

$$D = \sqrt{x_o^2 + y_o^2 + z_o^2}$$

donde

$$x_o = \frac{ad}{a^2 + b^2 + c^2}, \qquad y_o = \frac{bd}{a^2 + b^2 + c^2}, \qquad z_o = \frac{cd}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

a) Encuentre la mínima distancia del plano x+2y-z=4 al origen (punto (0,0,0)).
b) Encuentre la mínima distancia del plano x+2y-z=4 al punto (1,1,1).

Pregunta 3
La *Cardioide* es una curva definida en coordenadas polares por

$$r = 4a\cos^2(\theta/2).$$

a) Haga una gráfica aproximada de la curva.
b) Recordando que la longitud de una curva expresada en coordenadas polares y limitada entre los ángulos (θ_o y θ_1) puede calcularse mediante la expresión

$$L = \int_{\theta_o}^{\theta_1} \sqrt{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2} \quad d\theta. \tag{1}$$

Demuestre que la longitud total de la cardioide es $L = 16a$.

Pregunta 4
Encuentre la derivada ($y' = dy/dx$) de la función *Folio de Descartes* definida

por

$$x^3 + y^3 = 6xy$$

en el punto (3,3).

Pregunta 5
Considere una hélice definida de manera paramétrica por: $\mathbf{x}(t) = (t, 3\sin t, 3\cos t)$, $0 < t < 2\pi$
Calcule la *curvatura* (κ) de la hélice sabiendo que

$$\mathbf{x}'(t) = \frac{d\mathbf{x}}{dt}, \qquad \mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{x}'}{|\mathbf{x}'|}, \qquad \kappa = \frac{|\mathbf{T}|}{|\mathbf{x}'|}$$

y que el símbolo $|\mathbf{x}|$ indica la magnitud del vector $\mathbf{x}$.

Pregunta 6
Encuentre la masa de la atmósfera de la tierra sabiendo que su densidad se reduce de manera exponencial a la distancia a la superficie:

$$\rho = \frac{\rho_o}{e^{r-r_o}}. \tag{2}$$

Donde ρ_o es la densidad de la atmósfera en la superficie de la tierra que es donde se considera el origen de coordenadas y r_o es el radio de la tierra. La masa de una esfera es la triple integral

$$M = \int_{r=0}^{\infty} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} \rho r^2 \sin\theta d\phi d\theta dr.$$

Pregunta 7
Encuentre el ángulo de interesección de las superficies:

$$f(\mathbf{x}) = x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0 \qquad \text{y} \qquad g(\mathbf{x}) = x^2 + 2y^2 - z - 8 = 0$$

en el punto (2,1,-2).

Pregunta 8
Considere el campo vectorial $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$ en coordenadas cartesianas definido por

$$\begin{aligned} u_x &= A \sin z + C \cos y, \\ u_y &= B \sin x + A \cos z, \\ u_z &= C \sin y + B \cos x. \end{aligned}$$

Donde A, B, C son números reales.
Demuestre que $(\nabla \times \mathbf{u}) = \mathbf{u}$.

Pregunta 9
Considere la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & -4 & 2 \end{bmatrix}$$

Encuentre los valores propios (eigenvalores).

Pregunta 10
Encuentre el *promedio*, la *mediana* y la *moda* de la siguiente serie de números

$$13, 18, 13, 14, 13, 16, 14, 21, 13$$